APLICACIONES DE CONOCIMIENTO ELEMENTAL EN PROBLEMAS DE HIDROSTÁTICA

Guillermo Saavedra S
Departamento de Suelos y Recursos Naturales
Facultad de Agronomía- Universidad de Concepción
gusaaved@udec.cl

Introducción

La idea principal en este trabajo, es mostrar que para poder resolver un ejercicio de física de nivel universitario, el alumno debe tener una buena base, tanto algebraica como geométrica. En los ejercicios a resolver, se debe saber que es un trapecio, el significado de simetría, el de semejanza de triángulos, etc; El desconocimiento o el poco uso de cosas elementales, producen una tardanza en la comprensión de conceptos más avanzados. Los alumnos de primer año universitario, pudieran tener otro elemento en contra para resolver estos u otros ejercicios en donde interviene el cálculo, aunque éste sea elemental, como es el caso que en su mayoría, tienen física y cálculo en forma paralela, lo que no permite una buena maduración de la materia.

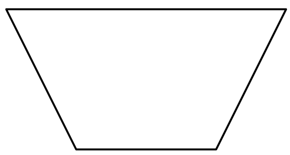
En principio otra de las ideas que tuve para realizar estos ejercicios, fue que pretendía aplicar aproximaciones rápidas y sin intervención del cálculo a los ejercicios que se muestran más abajo, pero al desarrollar el ejercicio de la fuerza total que actúa sobre la compuerta rectangular, me di cuenta que obtenía el mismo resultado que por integración (método correcto); en vista de esto es que estudié el motivo de esa igualdad, encontrando la relación que hace posible que la suma de cada fuerza aplicada sobre cada franja de área (intervalo), midiendo la presión en los puntos medios de ellos, es igual a la obtenida por el método de integración.

Para las personas que trabajan habitualmente con este tema puede no ser sorprendente la relación anterior, pero para cualquier estudiante si lo será y la idea es interesar a los estudiantes en buscar la causa o el por qué de ciertas cosas.

Ejercicio de física

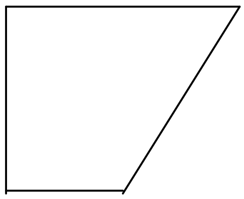
Determinar la fuerza total que se ejerce sobre la pared de una compuerta de un dique de 20 metros de profundidad, lleno de agua, si la copuerta tiene una forma:

a) trapezoidal simétrica de50 metros en su parte superior y 30 en la inferior (ver figura)



b) Determinar la fuerza total que se ejerce sobre la pared de una compuerta de un dique de 20 metros de profundidad, que contiene agua hasta una altura de 16 metros

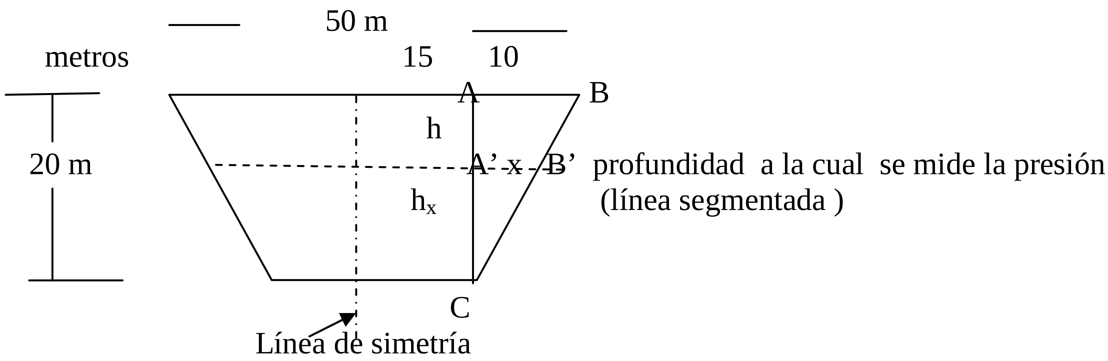
c). Idem al caso a) anterior, pero la compuerta tiene la forma



d.- El mismo cálculo, pero la compuerta es rectagular.

Desarrollo para el caso a)

Datos en un diagrama



La compuerta es simétrica al eje vertical segmentado

Se puede determinar la relación entre x y h a través de la semejanza de los triángulos ABC -y A' B' C

1) $\frac{10}{20}=\frac{x}{h_x}$; se sabe que $h_x = 20 - h$, entonces

$$\frac{10}{20}=\frac{x}{h_x}=\frac{x}{20-h}$$

Resolviendo esta ecuación para x, se obtiene

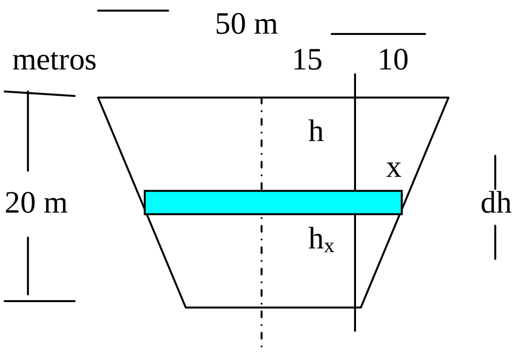
$20 - h = 2x \Rightarrow x = 10 - h/2$

En forma general, la expresión matemática de la presión hidrostática, es:

$$P = \rho gh = F/A$$

En que:

ρ es densidad del agua
g es aceleración de gravedad del lugar
h es profundidad a la cual se mide la presión
F es la fuerza
A es el área sobre la cual se aplica la fuerza F



Si consideramos una pequeña franja de área dA a la profundidad h, podemos pensar que en ella la presión es constante; en esta área la fuerza es:

$$dF = P\,dA$$

La fuerza total en la compuerta es

2) $F = \int PdA = \int \rho ghdA = \rho g \int h\,dA$

dA es el área de la franja horizontal coloreada

dA = largo x ancho = 2 (15 + x). dh

en que:

3) largo 2 (15 + 10 – h/2) siendo $x = 10 - h/2$
ancho dh

Reemplazando en 2)

$F = \rho g \int h\, dA = \rho g \int h\, 2(15 + x)\, dh$

Finalmente, de acuerdo a 3):

4) $F = 2\rho g \int h\,(25 - h/2)\, dh$

Esta expresión al integrarse entre los valores 0 y 20, resulta

$$F = 2{*}25\, \rho g\, [h^2/2]_0^{20} - 2\rho g [h^3/(3{*}2)]_0^{20}$$

$$F = 2.{*}\,25\ \rho g\,(400/2) - 2\rho g\,(8000/6)$$
$$= 10000\,\rho g - 8000/3\,\rho g$$

5) $= 22000/3\ \rho g$

En el S.I de medidas

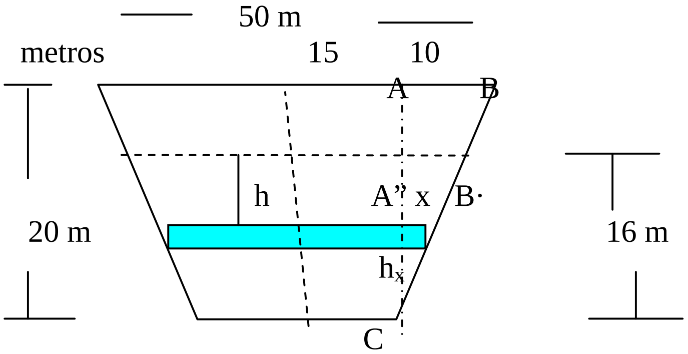
$\rho = 1000$ kg / m^3 para el agua
$g = 9{,}8$ m/ s^2

Estos valores reemplazados en 5) proporcionan el resultado

$$F = 22.10^3 {*} 9{,}8.10^3 / 3$$
$$\mathbf{= 21{,}56 * 10^7\ N}$$

Desarrollo caso b)

Este problema es parecido en su resolución al caso anterior, salvo el límite superior que ahora será de 16 metros y el lado del triángulo h_x será de 16-h; observe la figura de la compuerta; h es la profundidad medida a partir de la superficie del agua



Para determinar el lado x, empleamos la semejanza de los triángulos ABC y A’ B’ C, pero este lado debe ubicarse bajo el límite 16 (4 m de profundidad); veamos la relación que se obtiene

$$\frac{10}{20} = \frac{x}{h_x} = \frac{x}{16 - h}$$

De esta relación se determina x

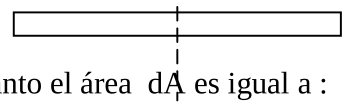
$$10\,(16 - h) = 20\,x$$

6) $x = 8 - h/2$

El área escogida dA, en la cual medimos la presión P, tiene las siguientes dimensiones

15 + x 15 + x

dh



Por lo tanto el área dA es igual a :

$$dA = 2\,(15 + x)\,dh$$

$$= 2(15 + 8 - h/2)\,dh \qquad \text{de acuerdo a 6)}$$

7) $dA = (46 - h)\,dh$

Procediendo de la misma forma que el problema anterior, se obtiene para la fuerza F total

$$F = \int PdA = \int \rho ghdA = \rho g \int h\,dA$$

8) $F = \rho g \int h\,(46 - h)\,dh$

La fórmula 8) es la misma que la 4) , salvo que se ha introducido el 2 dentro de la integral y hemos empleado la profundidad de 16 m en lugar de 20 Siendo el límite inferior para la integral de 0 y el superior 16 metros, se tiene:

$$F = \rho g \int_0^{16} h\,(46 - h)\,dh$$

$$F = \rho g[46\,h^2/2\;]_0^{16} - \rho g[\,h^3/3\,]_0^{16}$$

$$F = 23\;\rho g\,(256) - \rho g\,(4096/3)$$

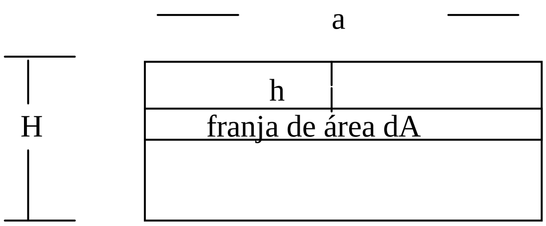
$$F = (5888 - 4096/3)\;\rho g$$

F = 4522, 67 ρg. **Resultado**

El caso c) lo dejamos para que el lector lo intente hacer; su resolución es muy parecida al caso a)

La solución del caso d) la daremos, puesto que, también, veremos una solución que creemos aproximada

El caso general de este tipo se puede plantear como:"calcular la fuerza ejercida sobre la compuerta cuando la altura del agua en el dique es H (máxima) y **a** el ancho de la compuerta"



La superficie superior del agua tiene una altura cero, siendo la mayor profundidad H; de acuerdo a lo visto anteriormente la fuerza total F, es:

$$F = \int P dA = \int \rho g h dA = \rho g \int h\, dA$$
$$F = \rho g \int h\, dA = \rho g \int h\, a\, dh =$$
$$F = \rho g\, a \int h dh$$

Los límites de integración son 0 y H, por lo tanto

$$\boxed{F = \rho g\, a\, [\,h^2/2\,]_0^H = \boldsymbol{\rho g a H^2/2}}$$

Al introducir los valores de H y de a, dados para nuestro ejercicio, en esta expresión, se obtiene el valor de 10^4 **ρg**

El cálculo de F para este caso lo volveremos a hacer, pero ahora en forma "aproximada", aplicado al ejercicio d), de acuerdo a lo siguiente:

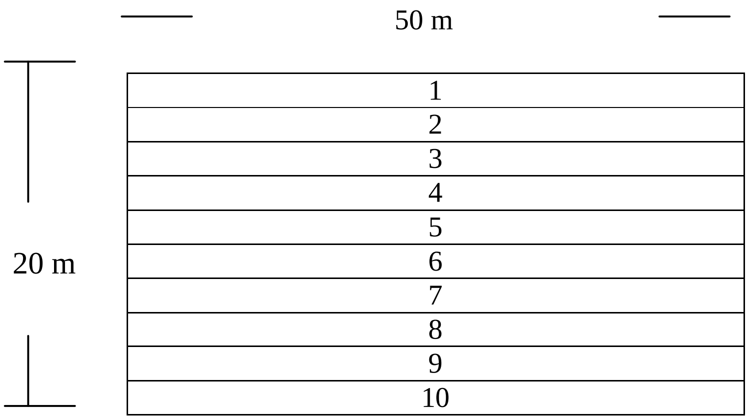
a) se divide la profundidad en 10 partes iguales, de manera que en este caso cada intervalo es de 2 metros
b) se hace cálculos de presión en el punto medio de cada intervalo.

c) se dibuja rectángulos de ancho igual al de la compuerta y altura de 2 metros; lo anterior nos permite calcular F_i en cada intervalo, de acuerdo a la expresión
$F_i = P_i \, dA$
d) se suma todas las fuerzas calculadas, obteniéndose la F (total)

Desarrollo:

Profundidad de agua dividida en 10 intervalos de 2 m, aplicada sobre el toral de la compuerta

En la figura siguiente se muestra la compuerta de 50 m de ancho por 20 metros de alto, dividida en 10 intervalos de 2 metros de alto.



Recordar que las mediciones de presión se hará en los puntos medios de cada intervalo, es decir en 1,3,5,7,…,19 m

Comencemos cuando h = 1 m
.
La fuerza $F_1 = P_1 \, dA = \rho g \, h \, aH^* = \rho g \,(1 \times 50 \times 2) = 100 \, \rho g$
$F_1 = 100 \, \rho g$

a es el ancho del rectángulo de cada intervalo (50 m)
H* es el alto de cada rectángulo (2 m)
h es la profundidad a la cual se mide la presión en cada rectángulo
a .H* es el área de cada franja rectangular

Observe que el área de cada rectángulo es de 100 m^2

De la misma manera calculamos las F_i siguientes, colocando el valor de la profundidad respectiva, resultando:

$F_2 = 300 \, \rho g$ $F_3 = 500 \, \rho g$
$F_4 = 700 \rho g$ $F_5 = 900 \, \rho g$
$F_6 = 1100 \, \rho g$ $F_7 = 1300 \, \rho g$

$F_8 = 1500\ \rho g$ $F_9 = 1700\rho g$
$F_{10} = 1900\ \rho g$

La suma de estas 10 F_i, es:

$$\mathbf{F = \sum F_i = 10^4\ \rho g \qquad i= 1,2,3, \quad ,10}$$

Si ahora hacemos una división de 20 intervalos, la altura de cada rectángulo es de 1 metro y su área es de 50 m^2.

Las mediciones de la presión P se hará en los puntos medios de cada intervalo, es decir en 0,5 ;1,5; 2,5;………19,5 m
.
La fuerza $F_1 = P_1\ dA= \rho g\ h\ aH^*= \rho g\ (0,5 \times 50 \times 1\ )$

$$= \rho g\ 0,5 \times 50 = 25\ \rho g$$

a es el ancho del rectángulo de cada intervalo (50 m)
H* es el alto de cada rectángulo (2 m)
h es la profundidad a la cual se mide la presión en cada rectángulo

NOTA; observe que para este ejemplo el producto del alto por el ancho de cada rectángulo, siempre es el mismo (50 m^2)

La fuerza en el rectángulo 2, es:

$F_2 = \rho g\ (\ 1,5 \times 50\ )= 75\ \rho g$

De la misma manera se calcula los otros valores de F

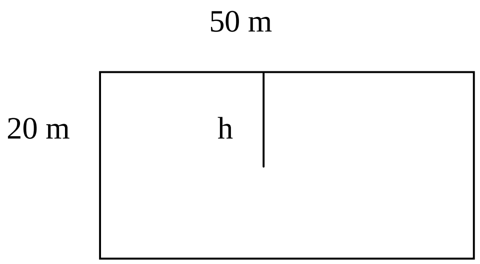
$F_3 = 125\ \rho g$	$F_4 = 175\ \rho g$	$F_5 = 225\ \rho g$	$F_6 = 275\ \rho g$
$F_7 = 325\ \rho g$	$F_8 = 375\ \rho g$	$F_9 = 425\ \rho g$	$F_{10}= 475\ \rho g$
$F_{11}= 525\ \rho g$	$F_{12} = 575\ \rho g$	$F_{13} = 625\ \rho g$	$F_{14} = 675\ \rho g$
$F_{15} = 725\ \rho g$	$F_{16}= 775\ \rho g$	$F_{17} = 825\ \rho g$	$F_{18} = 875\ \rho g$
$F_{19} = 925\ \rho g$	$F_{20}= 975\ \rho g$		

Al sumar las 20 fuerzas, se tiene una fuerza total de $10^4\ \rho g$; este resultado es el mismo obtenido anteriormente con 10 intervalos de 2 metros de altura cada uno.

Recordemos que si aplicamos la fórmula exacta $\mathbf{F= \rho g a H^2/2}$ obtenida a través de la integración, produce el mismo resultado, como se muestra a continuación

$$\mathbf{F= \rho g a H^2/2 = 50 \times 20^2\ /2}\ \rho g = 10^4\ \rho g$$

Si queremos ver la relación entre el método “ aproximado “ y el exacto, hagamos sólo un rectángulo de altura H= 20 m y ancho a = 50 m y hagamos el cálculo de nuestra “ aproximación” del punto medio



Aplicando la idea de la presión y el punto medio del intervalo, se obtiene:

$$* \qquad F = P.A = \rho g\, h.a.H = \rho g\ 10.\ 50.\ 20$$
$$= 10^4\ \rho g$$

Al comparar esta última expresión de la fuerza (sólo con letras) con la obtenida por integración :

$$F = \rho g\ a\ [\ h^2/2\mathbf{]}_0^H \mathbf{= \rho g a H^2/2}$$

se puede señalar que ambas expresiones son la misma, puesto que si reemplazamos los valores de las profundidades en la expresión exacta, considerando que $h=H/2$, se obtiene::

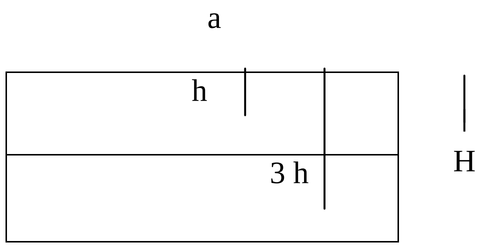
$$F \mathbf{= \rho g a H^2/2 = \rho g a H\ H/2 = \rho g a H h} \qquad \mathbf{**}$$

Observe las ecuaciones * y ** -

Para ver en forma general que ambas expresiones son la misma, se hará una división de la compuerta en dos intervalos, pero las medidas se indican con letras;

El significado de cada variable es el mismo que el de las expresiones anteriores utilizadas en este trabajo, así :

H es el alto de la compuerta
a es el ancho de la compuerta
h es la profundidad en el punto medio de cada intervalo
h_1 y h_2 son las profundidades totales de los puntos medios de los intervalos, medidas desde la superficie del agua



La profundidad de medida es h

La profundidad de medida es 3h

Para estos dos intervalos, la suma de las F_i

$F = F_1 + F_2 = P_1 A_1 + P_2 A_2$
$F = (P_1 + P_2)A$ Las áreas son iguales $A = H.a/2$

Se sabe que $P = \rho g h_i$, por lo tanto:

$F = (\rho g h_1 + \rho g h_2) = (\rho g h_1 + \rho g h_2)(a/2)\, H$
$= (\rho g h + 3\rho g h)(a/2)H = 4\rho g h\,(a/2)H$

Si observamos nuestra última figura de la compuerta, vemos que $4h = H$, por lo que la última expresión algebraica se transforma en:

$F = 4\rho g h\,(a/2)\,H = \rho g H\, H\, a/2 = \rho g H^2 a/2$

Si hacemos una división por 3 , veríamos que la cantidad de h que resulta de la sumatoria es 9; en forma general al dividir en n intervalos resultarán n^2 h, por lo que se concluye que la sumatoria de las fuerzas sobre los intervalos es igual al resultado obtenido por integración para la compuerta rectangular, siendo su valor igual a
$F = \rho g H^2 a/2$

Todo lo anterior se puede resumir como $\sum F_i = \sum P_i A_i = \rho g H^2 a/2$, siendo las presiones medidas en los puntos medios de cada intervalo y su profundidad h, desde la superficie del agua.al punto medio de cada intervalo.