

## MODELADO CON ECUACIONES DIFERENCIALES

Juan Espinoza B. jspinoza@hotmail.com  
Facultad de Agronomía – Universidad de Concepción – Chile

En términos simples una ecuación diferencial expresa una relación entre una función y algunas de sus derivadas, en este caso la función es la incógnita de la ecuación. No existe un método que permita resolver todas las ecuaciones diferenciales, es decir, no siempre es posible encontrar una fórmula explícita como solución de una ecuación diferencial, en ocasiones se pueden encontrar soluciones aproximadas mediante gráficas o técnicas numéricas. Los modelos matemáticos tratan de representar fenómenos reales a través de ecuaciones, a menudo toman la forma de una ecuación diferencial. Por ejemplo la tasa de crecimiento de una población es proporcional a su tamaño  $P$  y esta limitada por la capacidad de contención del medio  $B$  (el tamaño máximo hacia el cual tiende a estabilizarse la población) una ecuación que incorpora estas hipótesis es la ecuación diferencial logística

$$\frac{dP}{dt} = kP \left( 1 - \frac{P}{B} \right) \quad (1)$$

Otro modelo proveniente del ámbito de la física es el modelo para el movimiento de un resorte, la ley de Hooke establece que si se estira o se comprime un resorte  $x$  unidades desde su longitud natural, entonces ejerce una fuerza que es proporcional a  $x$ , en otros términos *fuerza de restitución* =  $-kx$  donde  $k$  es una constante positiva.

Si ignoramos la resistencia del aire o la fricción, entonces por la segunda ley de Newton (fuerza es igual a masa por aceleración), tenemos la ecuación diferencial

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = -kx \quad (2)$$

El orden de una ecuación diferencial es el correspondiente a la derivada de orden más alto que aparezca en la ecuación. La ecuación (1) es de primer orden y la ecuación (2) es de segundo orden.

### Ecuaciones Diferenciales Separables

En esta ocasión sólo se incluyen algunos modelos con ecuaciones diferenciales separables. Una ecuación separable es una ecuación diferencial de primer orden en la cual la expresión para  $dy/dx$  se puede factorizar como una expresión de  $x$  multiplicada por una función de  $y$ . En otras palabras, puede escribirse en la forma

$$\frac{dy}{dx} = g(x)f(y)$$

Esta ecuación se puede “separar” escribiéndola de la siguiente manera:

$$\frac{dy}{f(y)} = g(x)dx, \text{ hacemos } h(y) = \frac{1}{f(y)} \text{ si } f(y) \neq 0$$

Ahora podemos escribir la ecuación en la forma diferencial

$$h(y)dy = g(x)dx$$

así todas las  $y$  están en un miembro de la ecuación y todas las  $x$  están en el otro.

Integrando ambos miembros de la ecuación  $\int h(y)dy = \int g(x)dx$ , en algunos casos es posible despejar  $y$  como función de  $x$ .

La igualdad anterior se justifica aplicando el método de sustitución:

$$\begin{aligned}\int h(y)dy &= \int h(y(x))\frac{dy}{dx}dx \\ &= \int h(y(x))\frac{g(x)}{h(y(x))}dx \quad \text{porque } \frac{dy}{dx} = \frac{g(x)}{h(y)} \\ &= \int g(x)dx\end{aligned}$$

A continuación se resuelve la ecuación diferencial logística (1), para ilustrar el método de separación de variables.

$$\frac{dP}{dt} = kP\left(1 - \frac{P}{B}\right)$$

Separando variables  $\frac{dP}{P(1 - P/B)} = kdt$

Integrando  $\int \frac{dP}{P(1 - P/B)} = \int kdt$

Para calcular la integral  $\int \frac{dP}{P(1 - P/B)}$  se aplica el método de las fracciones parciales, de esta forma podemos escribir

$$\frac{1}{P(1 - P/B)} = \frac{B}{P(B - P)} = \frac{1}{P} + \frac{1}{B - P}$$

Luego la ecuación queda

$$\int \left( \frac{1}{P} + \frac{1}{B - P} \right) dP = \int kdt$$

$$\ln|P| - \ln|B - P| = kt + C \quad C \text{ es la constante de integración}$$

$$\ln \left| \frac{B - P}{P} \right| = -kt - C$$

$$\left| \frac{B - P}{P} \right| = e^{-kt - C} = e^{-C} e^{-kt}$$

$$\frac{B - P}{P} = Ae^{-kt} \quad \text{donde } A = \pm e^{-C}$$

Para determinar el valor de  $A$  consideramos que la población inicial es  $P_0$ , es decir,  $P(0)=P_0$

Sustituyendo  $t = 0$  y  $P = P_0$  en la última igualdad se obtiene  $\frac{B - P_0}{P_0} = Ae^0 = A$

Resolviendo la ecuación para P, resulta la solución de la ecuación logística  $P = \frac{B}{1 + Ae^{-kt}}$ ,

donde  $A = \frac{B - P_0}{P_0}$ .

Un problema típico, que conduce a una ecuación diferencial separable, son los problemas de mezclas: Si se tiene un estanque de capacidad fija lleno con una solución completamente mezclada de alguna sustancia, por una vía está entrando a razón fija una solución con una concentración dada, la mezcla se mantiene agitada y sale por otra vía a una razón fija. Si  $y(t)$  representa la cantidad de sustancia en el estanque en el tiempo  $t$ , entonces  $y'(t) = \frac{dy}{dt}$  es la razón de cambio a la cual entra la sustancia menos la razón a la cual sale la sustancia, entonces podemos escribir  $\frac{dy}{dt} = \frac{de}{dt} - \frac{ds}{dt}$ , donde  $\frac{de}{dt}$  es la razón de entrada de la sustancia y  $\frac{ds}{dt}$  es la razón de salida. El siguiente problema permitirá clarificar estos conceptos.

Un tanque contiene 1000 L de agua pura y le entra salmuera con 0,05 kg de sal por litro de agua a razón de 5 L/min, así como otra salmuera con 0,04 kg de sal por litro de agua a razón de 10 L/min. La solución se mantiene mezclada perfectamente y se drena del tanque con una rapidez de 15 L/min. ¿Cuánta sal está en el tanque (a) después de  $t$  minutos y (b) después de una hora?

Sean  $y(t)$  la cantidad de sal (en kilogramos) después de  $t$  minutos.

$\frac{dy}{dt}$  la razón de cambio de la cantidad de sal.

Para plantear la ecuación diferencial, escribimos  $\frac{dy}{dt} = (\text{razón de entrada}) - (\text{razón de salida})$

$$\text{Razón de entrada} = \frac{de}{dt} = \left(0,05 \frac{\text{kg}}{\text{L}}\right) \left(5 \frac{\text{L}}{\text{min}}\right) + \left(0,04 \frac{\text{kg}}{\text{L}}\right) \left(10 \frac{\text{L}}{\text{min}}\right) = 0,65 \frac{\text{kg}}{\text{min}}$$

$$\text{Razón de salida} = \frac{ds}{dt} = \left(\frac{y(t) \text{ kg}}{1000 \text{ L}}\right) \left(15 \frac{\text{L}}{\text{min}}\right) = \frac{3y(t) \text{ kg}}{200 \text{ min}}$$

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dt} &= \frac{de}{dt} - \frac{ds}{dt} = 0,65 - \frac{3y(t)}{200} \\ \frac{dy}{dt} &= \frac{130 - 3y}{200} \end{aligned}$$

Integramos para resolver esta ecuación diferencial separable

$$\begin{aligned} \int \frac{dy}{130 - 3y} &= \int \frac{dt}{200} \\ -\frac{1}{3} \ln|130 - 3y| &= \frac{t}{200} + C \end{aligned}$$

Como inicialmente sólo había agua pura en el estanque se tiene que  $y(0) = 0$ , con lo cual la constante de integración  $C$  es  $-\frac{1}{3}\ln 130$ , de manera que en la igualdad queda

$$\ln|130 - 3y| = \ln 130 - \frac{3t}{200}$$

Por lo tanto  $|130 - 3y| = e^{\ln 130 - \frac{3t}{200}}$

$$|130 - 3y| = e^{\ln 130} e^{-\frac{3t}{200}}$$

$$|130 - 3y| = 130e^{-\frac{3t}{200}}$$

Como  $y(t)$  es una función continua y el segundo miembro de la igualdad es siempre positivo, deducimos que  $130 - 3y$  es positivo, luego  $|130 - 3y| = 130 - 3y$ , por lo tanto

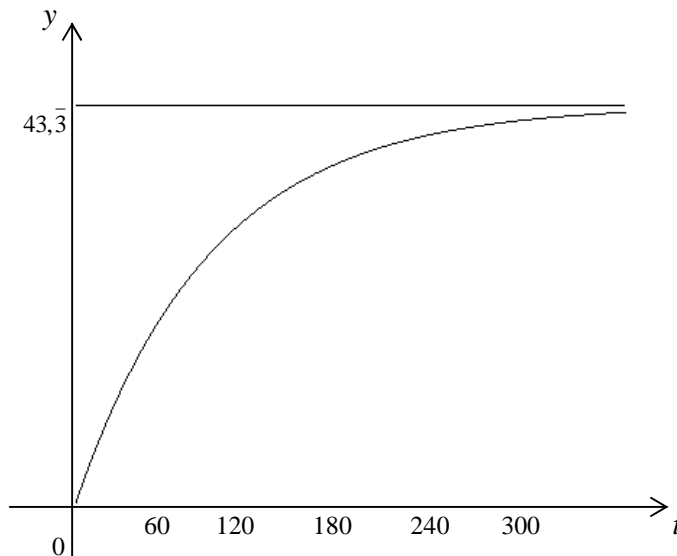
$$130 - 3y = 130e^{-\frac{3t}{200}}$$

$$y(t) = \frac{130 - 130e^{-\frac{3t}{200}}}{3}$$

$$y(t) = 43,\bar{3}(1 - e^{-\frac{3t}{200}})$$

Recordemos que  $y(t)$  es la cantidad de sal (en kilogramos) después de  $t$  minutos. La cantidad de sal después de una hora es  $y(60)$ .

$$y(60) = 43,\bar{3}(1 - e^{-\frac{3(60)}{200}}) \approx 25,715 \text{ kg.}$$



**Figura 1.** Se muestra la gráfica de la función  $y(t)$  del ejemplo anterior, se observa que a medida que pasa el tiempo la cantidad de sal tiende asintóticamente a  $43,\bar{3}$  kilogramos.

Otro modelo de ecuación diferencial que se puede resolver por separación de variables es la ley de enfriamiento de Newton, que establece que la razón de cambio de la temperatura de un objeto es proporcional a la diferencia entre la temperatura del objeto y la temperatura del aire que lo rodea. Un objeto que está a  $70^\circ$ , se enfría desde  $350^\circ$  a  $150^\circ$  en 45 minutos. Usando la ley de enfriamiento de Newton determinar cuanto tiempo tardará en enfriarse hasta  $80^\circ$ .

Consideremos las siguientes variables:

$t$  = tiempo en minutos y  $T$  = temperatura del objeto en grados Celsius.

Se establece que la razón de cambio de la temperatura del objeto ( $\frac{dT}{dt}$ ) es proporcional a la diferencia entre la temperatura del objeto y la temperatura del aire ( $T - 70$ ), es decir:

$$\frac{dT}{dt} = K(T - 70) \text{ donde } K \text{ es la constante de proporcionalidad.}$$

Separando las variable integrando ambos lados se obtiene:

$$\begin{aligned} \frac{dT}{dt} = k(T - 70) &\Rightarrow \int \frac{dT}{T - 70} = \int k dt \\ \ln|T - 70| &= kt + C_1 \\ T - 70 &= kt + C_1 \quad \text{como } T > 70; |T - 70| = T - 70 \\ T - 70 &= e^{kt+C_1} \Rightarrow T = 70 + Ce^{kt} \quad \text{donde } C = e^{C_1} \end{aligned}$$

Como  $T(0) = 350 \Rightarrow 350 = 70 + C$  con lo cual  $C = 280$ .

Luego  $T(t) = 70 + 280e^{kt}$ , como  $T(45) = 150$ , se tiene que:

$$\begin{aligned} 70 + 280e^{45k} &= 150 \\ e^{45k} &= \frac{150 - 70}{280} = \frac{2}{7} \\ 45k &= \ln\left(\frac{2}{7}\right) \\ k &= \frac{1}{45} \ln\left(\frac{2}{7}\right) \approx -0,02784 \end{aligned}$$

En conclusión  $T(t) = 70 + 280e^{-0,02784t}$

Ahora debemos hallar  $t$  de modo que  $T(t) = 80$  grados Celsius.

Debemos resolver la ecuación  $70 + 280e^{-0,02784t} = 80$

$$70 + 280e^{-0,02784t} = 80$$

$$e^{-0,02784t} = \frac{1}{28}$$

$$t = \frac{\ln\left(\frac{1}{28}\right)}{-0,02784} \approx 119,7 \text{ minutos}$$

El objeto tardará aproximadamente 2 horas en enfriarse desde los 350 grados Celsius hasta los 80 grados Celsius.

Otra forma de resolver el problema, es usando integrales definidas:

Primero determinamos la constante  $k$

$$\frac{dT}{dt} = K(T - 70) \Rightarrow \int_{350}^{150} \frac{dT}{T - 70} = \int_0^{45} k dt$$

$$T > 70 \quad \ln(T - 70) \Big|_{350}^{150} = kt \Big|_0^{45}$$

$$\ln(150 - 70) - \ln(350 - 70) = 45k$$

$$\ln\left(\frac{80}{280}\right) = 45k \Rightarrow k = \frac{1}{45} \ln\left(\frac{2}{7}\right)$$

sustituyendo  $k$  en la primera ecuación:  $\frac{dT}{dt} = \frac{1}{45} \ln\left(\frac{2}{7}\right)(T - 70)$

Ahora separando las variable e integrando:

$$\int_{350}^{150} \frac{dT}{T - 70} = \int_0^{t_F} \frac{1}{45} \ln\left(\frac{2}{7}\right) dt$$

$$\ln(80 - 70) - \ln(350 - 70) = \frac{1}{45} \ln\left(\frac{2}{7}\right)(t_F - 0)$$

$$t_F = \frac{45 \ln\left(\frac{1}{28}\right)}{\ln\left(\frac{2}{7}\right)} \approx 119,7 \text{ minutos} \approx 2 \text{ horas.}$$

**El modelo de Mitscherlich.** Un modelo útil para la producción agrícola, especifica que el tamaño  $Q(t)$  de un cultivo cambia de tal forma que la razón de cambio es proporcional a  $B - Q(t)$ , donde  $B$  es el tamaño máximo posible del cultivo.

Escribimos la relación como una ecuación diferencial y encontremos la solución general. El modelo establece que la razón de cambio es proporcional a  $B - Q(t)$ , donde  $B$  es el tamaño del cultivo.

$$\frac{dQ}{dt} = k(B - Q(t)) \quad \text{se entiende que } Q(t) = Q, \quad k > 0$$

Separando las variables

$$\frac{dQ}{B - Q} = k dt$$

Integrando

$$\int \frac{dQ}{B - Q} = \int k dt$$

$$-\ln|B - Q| = kt + C_1, \text{ como } B - Q > 0$$

$$-\ln(B - Q) = kt + C_1$$

$$B - Q = e^{-kt - C_1}$$

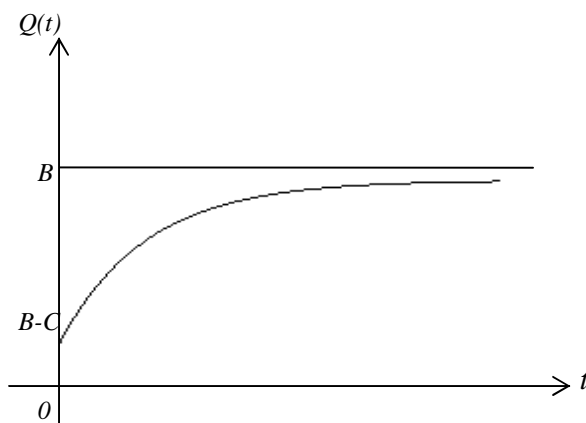
$$B - Q = e^{-kt} e^{-C_1} \quad \text{sea } C = e^{-C_1}$$

$$-Q = Ce^{-kt} - B$$

La solución general es :  $Q(t) = B - Ce^{-kt}$

Para trazar la gráfica de la función  $Q(t)$ , estudiemos el comportamiento cuando  $t$  tiende a infinito,  $\lim_{t \rightarrow +\infty} (B - Ce^{-kt}) = B$  a medida que pasa el tiempo el tamaño del cultivo  $Q(t)$  tiende asintóticamente a la recta  $y = B$ , era lo esperado por las condiciones del problema.

El valor inicial es  $Q(0) = B - C$  que es siempre positivo, porque  $B$  es el tamaño máximo hacia el cual tiende  $Q(t)$ . La primera derivada  $\frac{dQ}{dt} = k(B - Q) > 0 \quad \forall t$ , como la primera derivada es siempre positiva la función es positiva y creciente.



**Figura 2**, gráfica de la función  $Q(t) = B - Ce^{-kt}$ .

## Bibliografía

- Blanchard, Paul; Devaney, Robert; Hall, Glen. Differential Equations. 3ª Edición. Editorial Thomson, 2006.
- Colin W. Clark. Mathematical Bioeconomics. 2ª Ed. (Nueva York: John Wiley & Sons, 1990).
- Edwards, Henry; Penney, David. Ecuaciones Diferenciales. Segunda Edición. Editorial Pearson Educación, México 2001.
- Nagle R. Kent, Saff B. Edwards, Zinder D. Arthur. Ecuaciones Diferenciales y problemas con valores en la frontera. Editorial Addison Wesley, México 2001.
- Zill, Dennis. Ecuaciones Diferenciales con Aplicaciones al Modelado. Editorial Thomson. Octava edición, 2006